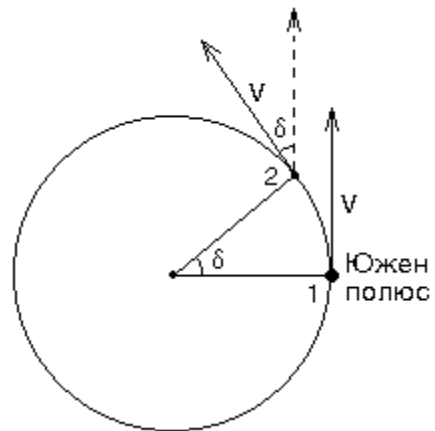


III кръг на III национална олимпиада по астрономия, април 2000 г.
УЧЕНИЦИ VII - IX КЛАС.

Задача 1 (9 точки): Участници в полярна експедиция се намират точно на южния полюс по време на полярната нощ. Те тръгват оттам през дълбокия сняг със скорост 2 km/h , като се движат по посока на звездата Сириус. На какво разстояние от полюса ще се намират след 24 часа? Каква линия ще представлява техният път?

Решение: Движейки се със скорост 2 km/h , участниците в полярната експедиция няма да изминат голямо разстояние за 24 часа. Можем да пренебрегнем кривината на земното кълбо и да считаме, че те се движат по равнина **(1 т.)**. Векторът на скоростта им непрекъснато е насочен към звездата Сириус. Звездата Сириус участва във видимото денонощно въртене на небесната сфера от запад на изток и за 24 часа се завърта по небето приблизително на $360^\circ + 1^\circ$. Допълнителният един градус се появява поради това, че звездата прави едно пълно завъртане по небето не за 24 часа (слънчево денонощие), а за около $23^{\text{h}}56^{\text{m}}$ (звездно денонощие). За оставащите 4 минути до 24 часа звездата се завърта на още $(4^{\text{m}} : 60) \times 15^\circ = 1^\circ$ **(2 т.)**. Следователно векторът на скоростта на полярниците се върти равномерно от изток на запад, следвайки направлението към Сириус, като прави едно пълно завъртане за едно звездно денонощие. По големина скоростта на движение на полярниците остава постоянна. Това означава, че те се движат по окръжност с дължина $23^{\text{h}}56^{\text{m}} \times 2 \text{ km/h} = 47.867 \text{ km}$ и радиус $47.867 / 2\pi = 7.622 \text{ km}$ **(4 т.)**. Центърът на окръжността е встрани от полюса. След като опишат един път тази окръжност и се върнат на южния полюс за $23^{\text{h}}56^{\text{m}}$, полярниците ще извървят още $1/360$ част от нея, или 133 m до пълните 24 часа.

Понеже 133 m са много по-малко от радиуса на окръжността, можем да пренебрегнем кривината на тази дъга и да считаме, че полярните изследователи ще се окажат на 133 m от полюса **(2 т.)**. Разбира се, за да бъде така, те трябва да се движат много точно по посока на Сириус, а това е трудно при вървене, особено в дълбок сняг. Необходимо е да се отбележи, че понеже са на южния полюс, полярниците ще се движат по посока, обратна на часовниковата стрелка.



При движение по окръжност, ако за даден интервал от време радиус-векторът на движещата се точка се завърти на ъгъл δ , то и векторът на скоростта се завърта на същия ъгъл δ .

**III кръг на III национална олимпиада по астрономия, април 2000 г.
УЧЕНИЦИ VII - IX КЛАС.**

Задача 2 (12 точки): Представете си, че се намирате в затъмнена стая без прозорци, в едната стена на която е вградена тънка пластинка с малък кръгъл отвор. Всъщност вие се намирате в голяма "камера обскура". Ако застанете до отвора и гледате към отсрещната стена, може да видите изображение на това, което се намира зад вас извън стаята, примерно на Слънцето. Забелязано е, обаче, че така получените изображения не са резки, а леко размазани. На какво се дължи това? Опитайте се да формулирате при какво условие това размазване няма да се забелязва от мястото, където се намирате. Запишете го и във вид на формула. Каква форма ще има изображението на Слънцето върху стената? Ще се променя ли тя с времето? Предполагаме, че дифракция на светлината не съществува.

Решение: За да се получи изображение, е необходимо отворът да има размери, които да позволяват преминаването на достатъчно количество светлина. За далечен обект, като Слънцето, може да се счита, че от всяка негова точка върху отвора пада успореден сноп светлина. След преминаването си през отвора всеки такъв сноп формира върху отсрещната стена петънце с размер, равен на размера на отвора. Т.е., всяка точка от Слънцето се изобразява като петънце с размерите на отвора. Лесно е да се съобрази, че именно това е петното на размазване, което влошава рязкостта на контурите и всеки детайл от изображението. Колкото отворът е по-голям, толкова рязкостта е по-малка, и обратно **(4 т.)**. За да не забелязваме размазването на изображението от мястото, където стоим, ние трябва да виждаме това петно под ъгъл, по-малък от една дъгова минута. Такава е разделителната способност на окото. Това е еквивалентно на твърдението, че трябва да виждаме самия отвор под ъгъл, по-малък от една минута, ако стоим до стената, където се проектира изображението **(2 т.)**.

Нека d е диаметърът на отвора, l е разстоянието от отвора до отсрещната стена. Тогава:

$$d = \theta [\text{rad}] \, l = \pi \theta' / (180 \times 60') = \theta' / 3438$$

Но условието е θ да е $1'$, откъдето следва, че:

$$d = l / 3438 \text{ (2 т.)}$$

Тъй като Слънцето е кръг върху небесната сфера, светлината му, преминавайки през отвора, ще формира светлинен конус, който като попада върху стената, ще дава изображението на Слънцето. Ако оста на конуса е перпендикулярна на стената, то изображението на Слънцето ще бъде кръг. Това, обаче може да се случи само когато Слънцето е на хоризонта, при това фронтално срещу стената на стаята. Във всички останали случаи оста на светлинния конус ще сключва някакъв ъгъл с перпендикуляра към стената. Тогава изображението на Слънцето ще бъде овално (по-точно елипса) **(2 т.)**. При това, колкото по-далеч е Слънцето от перпендикуляра, спуснат от отвора към отсрещната стена, толкова по-издължено ще бъде изображението. Тъй като Слънцето се движи по небесната сфера, то и изображението му ще се премества по стената. Тогава ще се променя и ъгълът, под който светлинният конус пада върху стената. Следователно ще се променя и сплеснатостта на овала (т.е. ексцентрицитетът на елипсата) на изображението на Слънцето **(2 т.)**.

III кръг на III национална олимпиада по астрономия, април 2000 г.
УЧЕНИЦИ VII - IX КЛАС.

Задача 3 (13 точки): Сидеричният период на околоосно въртене на Юпитер е $9^h50^m30^s$. Периодът на обикаляне на Юпитер около Слънцето е 4332.6 земни средни слънчеви денонощия. С колко време продължителността на звездното денонощие на Юпитер се отличава от продължителността на юпитерианското слънчево денонощие? Разликата изразете в юпитерианско слънчево време, като приемете, че слънчевото денонощие на Юпитер е разделено на 24 часа.

Решение: Нека означим юпитерианското слънчево денонощие с $P_{Ю^{\odot}}$, а юпитерианското звездно денонощие с $P_{Ю^*}$. Продължителността на слънчевото денонощие е по-голяма от продължителността на звездното денонощие, когато посоката на въртене на планетата около нейната ос съвпада с посоката на обикалянето ѝ около Слънцето, както е при Юпитер **(1 т.)**. При едно завъртане около Слънцето броят на слънчевите денонощия ще е с едно по-малък от броя на звездните денонощия, както е при Земята **(1 т.)**. Тогава, ако $N^{\odot}$ е броят на слънчевите денонощия в една юпитерианска звездна година, а N^* е броят на звездните денонощия, то:

$$N^{\odot} = N^* \mp 1 \quad \textbf{(2 т.)} \quad (1)$$

Да определим N^* . По условие $P_{Ю^*} = 9^h50^m30^s = 0^d.41007$ земни средни слънчеви денонощия. Една звездна година на Юпитер е равна на 4332.6 земни средни слънчеви денонощия и следователно $N^* = 4332.6 / 0^d.41007 = 10565.5$ юпитериански звездни денонощия. Тогава от (1) следва, че $N^{\odot} = 10564.5$ юпитериански звездни денонощия **(3 т.)**. Оттук намираме съотношението между $P_{Ю^*}$ и $P_{Ю^{\odot}}$:

$$P_{Ю^*} = (N^{\odot} / N^*) P_{Ю^{\odot}} = 0.99990535 P_{Ю^{\odot}} \quad \textbf{(2 т.)}$$

Щом като едно юпитерианско средно слънчево денонощие съдържа 24 юпитериански часа, то:

$$P_{Ю^*} = 0.99990535 \times 24 \text{ юпитериански часа}$$

$$P_{Ю^*} = 23 \text{ ю. часа } 59 \text{ ю. мин. } 51.82 \text{ ю. сек.} \quad \textbf{(2 т.)}$$

Следователно разликата в денонощията е:

$$\Delta P = P_{Ю^{\odot}} \mp P_{Ю^*} = 8.18 \text{ юпитериански секунди.} \quad \textbf{(2 т.)}$$

**III кръг на III национална олимпиада по астрономия, април 2000 г.
УЧЕНИЦИ VII - IX КЛАС.**

Задача 4 (14 точки): Установено е, че астероид, движещ се по кръгова орбита с радиус 4 AU, ще се сблъска с друг астероид, след което ще се насочи към Земята. За да бъде отклонен от първоначалната си орбита първият астероид, към него е изпратен малък астероид "камикадзе". Малкият астероид с маса 10^9 тона е изстрелян в противоположна на Слънцето посока от разстояние 1 AU от Слънцето. Началната му скорост спрямо Слънцето е v_0 . Моментът на изстрелването е пресметнат така, че когато малкият астероид достигне до орбитата на големия, да се сблъсне в него. Получава се взрив, при който цялата кинетична енергия на малкия астероид се трансформира в енергия на взрива. Изчислено е, че енергията на взрива трябва да бъде поне 1.2×10^{20} J, за да се предизвика необходимото отклонение на големия астероид. Каква е началната скорост v_0 на астероида "камикадзе"? Гравитационното взаимодействие между двата астероида да се пренебрегне.

Решение: Малкият астероид се изстрелва от точка, намираща се на разстояние $r_0 = 1$ AU от Слънцето и се сблъсква с големия астероид в точка на разстояние $r = 4$ AU от Слънцето. Нека в момента на сблъсъка скоростта на малкия астероид относно Слънцето е v . Тогава съгласно закона за запазване на пълната механична енергия:

$$mv_0^2 / 2 - G M_c m / r_0 = mv^2 / 2 - G M_c m / r, \quad (3 \text{ т.})$$

където $m = 10^9$ t е масата на малкия астероид, M_c е масата на Слънцето, а G е гравитационната константа.

Оттук намираме:

$$v = (v_0^2 - 2G M_c (1/r_0 - 1/r))^{1/2} \quad (1 \text{ т.})$$

Скоростта w на движение на големия астероид ще бъде равна на кръговата скорост на разстояние от Слънцето r :

$$w = (G M_c / r)^{1/2} \quad (1 \text{ т.})$$

Разбира се, тя може и да се пресметне с помощта на третия закон на Кеплер, приложен, например, за астероида и за Земята.

По посока скоростта v на движение на малкия астероид относно Слънцето е перпендикулярна на скоростта w на големия астероид по неговата орбита. В координатна система, неподвижно свързана с големия астероид, малкият астероид ще има скорост v_1 , която представлява векторна сума от скоростите v и w . Следователно относителната скорост на астероида "камикадзе" спрямо големия астероид в момента на сблъсъка ще бъде:

$$v_1 = (v^2 + w^2)^{1/2} \quad (3 \text{ т.})$$

Тук използваме Питагоровата теорема. Кинетичната енергия на малкия астероид, която ще се превърне в енергия на взрива, е:

$$E_K = mv_1^2 / 2$$

$$E_K = m(v^2 + w^2) / 2 \quad (2 \text{ т.})$$

Заместваме v и w с получените за тях изрази и намираме:

$$E_K = m(v_0^2 - 2G M_c (2/r_0 - 3/r)) / 2 \quad (1 \text{ т.})$$

Оттук:

$$v_0 = (2E_K / m + 2G M_c (2/r_0 - 3/r))^{1/2} \quad (2 \text{ т.})$$

Имайки предвид, че $E_K = 1.2 \times 10^{20}$ J, получаваме:

$$v_0 \approx 36.76 \text{ km/sec.} \quad (1 \text{ т.})$$